TEORÍA COMBINATORIA

Salvador Pintos y Guido Urdaneta

Septiembre, 2003

1. Introducción

Configuraciones básicas

1. Extraer un conjunto de otro
2. particionar un conjunto

1. Conjunto del cual se extrae tiene elementos repetidos o no. Conjunto extraído: ordenado o no; con elementos repetidos o no. Si es ordenado que tipo de orden: lineal o circular.

2. Particionar elementos en cajas: vacías o no; elementos distinguibles o no; cajas distinguibles o no; número de cajas fijo o variable.

Problemas planteados:

- número de configuraciones
- enumeración de configuraciones
- optimizar una función sobre las configuraciones

2. Principios básicos

2.1. DEFINICIONES

Combinatoria: conjunto de configuraciones que se formar a partir de un conjunto finito.

Un conjunto A es finito si existe una biyección de A en$\{1, 2, ..., n\} = N_n$

A y B coordinables si existe $F : A \Longrightarrow B$ tal que F es biyectiva.

Principio de correspondencia

$A \sim B \Longleftrightarrow [A] = [B]$

$[A]$ se lee cardinal de A.

Ejemplo torneo por eliminación: número de partidos jugados con jugadores que pierden.

Principio del producto

$|A \times B| = |A|\,|B|$

Principio de la suma

Si $A \cup B = \emptyset \Longrightarrow [A \cup B] = [A] + [B]$

Ejemplo:

Colorear un cuadrado con q colores distintos de modo que vértices adyacentes tengan diferente color: calcular configuraciones con vértices 1 y 3 de diferente color mas vertices 1 y 3 con igual color.

¿De cuántas formas se pueden presentar las dos primeras piezas jugadas en una partida de dominó?

Principio de inclusiones y exclusiones

$$\cup_{i=1}^{n} A_i = -\sum_{F \neq \Phi \subset N_n} (-1)^{|F|}\,|A_F| \quad A_F = \cap_{i \in F} A_i$$

Principio de Dirichlet

Si se colocan n objetos en m cajas alguna caja tiene más de E(n/m) elementos y existe alguna con a lo sumo E(n/m) elementos. Notación E(n/m) parte entera.

3. Configuraciones básicas de los problemas de extracción

En lo que sigue el conjunto A original tiene n elementos y B, el extraido, k. Si los elementos de B no pueden repetirse, entonces $k \leq n$.

3.1. Arreglos

B subconjunto ordenado de A. Número de arreglos $[n]_k = n(n-1)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

Ejemplo: Palabras de 5 letras extraídas de la palabra murciélago.

3.2. Arreglos con repetición

B conjunto ordenado de k elementos tomados de los n elementos de A admitiendo repetición de elementos. Existen n^k.

Ejemplo: ¿Cuántas placas de 6 cifras se pueden formar con los 10 dígitos?.

3.3. Permutaciones

Es un caso particular de arreglo cuando $k = n$.

3.4. Permutaciones con repetición

Este concepto difiere sensiblemente del anterior. Dado un conjunto $A = a_1, ...a_r$ y otro conjunto de multiplicidades $k_1, ...k_r$ que representa el número de veces que cada elemento de A esta repetido en el nuevo conjunto, construir todos los conjuntos distintos, entendiendo que distintos significa en otro orden ya que los elementos y sus índices de repetición están fijos.

Si $n = k_1 + ... + k_r$ el número de permutaciones con repetición es:

$$P(k_1, ..., k_r) = \frac{n!}{k_1!,\ .....,\ k_r!}$$

Demostración: Se las considera distintas y se las permuta. Luego se cuentan las que coinciden dado que las a_r se consideran iguales.

Ejemplo: ¿Cuántas palabras se pueden formar permutando las letras de Missisipi?.

3.5. Combinaciones

Subconjunto B de k elementos donde el orden no importa. Notación $\binom{n}{k}$.

Definición:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{[n]_k}{k!}$$

Surge de dividir el arreglo por las permutaciones.

Propiedades:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

3.6. Combinaciones con repetición

Dado el conjunto A, se fija el número de elementos del conjunto B, por ejemplo $A = \{z, x, y, v\}$ ($n = 4$) y $k = 7$ una combinación con repetición es $B = \{z, z, x, y, y, v, v\}$

Ejemplo: Se tienen en la nevera muchas cervezas de cuatro tipos: Brahma, Polar, Regional, Corona. ¿De cuántas formas se pueden elegir siete cervezas?.

Solución: Se establece una correspondencia entre las cervezas elegidas y secuencias de unos y ceros. Por ejemplo, si las cervezas son 3 B, 3P, 0R y 1C, entonces la secuencia asociada es: 1110111001. Donde los unos representan cervezas y los ceros separaciones entre los tipos de cerveza. Luego, por el principio de correspondencia, nos basta con saber contar las secuencias distintas formadas por siete unos y tres ceros, es decir,

$$\binom{7+4-1}{7}$$

Nótese que esta solución es equivalente a repartir a siete botellas iguales entre 4 personas llamadas Brahma, Polar, Regional y Corona, tema que se estudiará en la teoría de particiones.

Este resultado es generalizable para cualquier n y k. El número de combinaciones con repetición es: $\binom{n+k-1}{k}$

Demostración: se intercalan $n-1$ ceros entre k unos y se permutan de todas las formas posibles. Los ceros crean n espacios de separación para los unos.

Este resultado es equivalente a $P(k, n-1)$.

4. Números binomiales

4.1. Binomio de Newton

demostración

Formula de Stifel $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

Triángulo de Pascal

4.2. Caminos en el plano

Caminos entre el origen y $P = (n, k) = \binom{n+k}{k}$.

¿Dónde se está en n pasos?. Demostración alternativa de la fórmula de Stifel con dos llegadas distintas al punto P.

La cola del Bus. Probar que los caminos entre O y P, $(k \geq n)$ es igual a los caminos entre $A = (0, 1)$ y $R = (n, k + 1)$.

Contemos los caminos que se detienen en el punto M es decir que toca la diagonal por primera vez.

Y simetricemos el tramo AM respecto de la diagonal en BM. Necesariamente todo camino desfavorable se transforma en un camino entre B y R. Luego, el total de caminos desfavorables es $\binom{n-1+k+1}{k+1}$. Entonces los caminos favorables son:

$$\binom{n+k}{k} - \binom{n+k}{k+1} = \binom{n+k}{k} \left(\frac{k+1-n}{k+1} \right)$$

la probabilidad de un camino favorable es $\left(\frac{k+1-n}{k+1}\right)$. Si P está en la diagonal esta probabilidad es$\left(\frac{1}{k+1}\right)$.

5. Particiones

5.1. n objetos distintos en k cajones distinguibles con las cantidades $\{n_1,\ n_2,\ n_3,\ ...,n_k\}$en cada cajón

Si $n = \sum_{j=1}^{k} n_j$ entonces existen $\frac{n!}{n_1!, ..., n_k!}$.

Demostración: Asignar los elementos a la caja 1 (existen $\begin{pmatrix} n \\ n_1 \end{pmatrix}$ asignaciones posibles), de los $n - n_1$restantes asignar los de la caja 2 y así sucesivamente.

Esta fórmula es equivalente a las permutaciones con repetición. Se hacen todas las permutaciones posibles de los n elementos y se asignan los primeros $n_1$para la caja 1; una vez dentro de la caja, el orden no importa y por lo tanto se dividen el número total de permutaciones ($n!$) entre el número de permutaciones de los elementos de la caja 1 ($n_1!$). De idéntica forma se procede con las restantes cajas.

5.2. *n* objetos diferentes en *k* cajones indistinguibles no vacíos

Números de Stirling de segunda clase. Si formo todas las configuraciones posibles de n elementos, a cada configuración le puedo agregar un nuevo elemento de k maneras distintas, es decir en cualquiera de las clases existentes; además, puedo considerar el elemento como una clase en si y juntarlo con cualquiera de las configuraciones de n elementos divididos en k-1 clase, es decir se establece la relación de recurrencia:

$$S_k^n = kS_k^{n-1} + S_{k-1}^{n-1}$$

Muéstrese los casos particulares:

$$S_1^n = 1, \qquad S_n^n = 1, \qquad S_{n-1}^n = \binom{n-1}{2}, \qquad S_2^n = 2^{n-1} - 1$$

Las dos primeras son las condiciones iniciales necesarias para generar la recurrencia.

Ejemplo: Análisis de conglomerados.

5.3. *n* objetos diferentes en *k* cajones distinguibles no vacíos

Estas configuraciones se pueden construir mediante la adición de un nuevo elemento a todas las posibles configuraciones con $n - 1$ elementos. Existen dos posibilidades:

1. El elemento se agrega a una de las k clases existentes. En este caso hay k maneras de agregarlo.

2. Se crea una nueva clase que contiene únicamente el elemento a agregar. Hay orden en los cajones, existen k maneras de ubicar esta nueva clase.

Esto es equivalente a todas las permutaciones del caso de cajones no distinguibles.

$$T_k^n = kT_k^{n-1} + kT_{k-1}^{n-1} = k!S_k^n$$

$$T_k^{n+1} = kT_k^n + kT_{k-1}^n = k!S_k^{n+1}$$

Ejemplo: Repartir estudiantes de matemática entre tres profesores.

5.4. *n* objetos diferentes en *k* cajones indistinguibles que pueden quedar vacíos

Esto equivale a la suma de las posibles configuraciones de n objetos en $1, 2, ..., k$ cajones y sería

$$\sum_{i=1}^{k} S_i^n$$

Ejemplos: El mismo ejemplo anterior, pero sin obligar que todos los profesores tengan alumnos.

5.5. *n* objetos diferentes en *k* cajones distinguibles que pueden quedar vacíos

Para cada objeto hay k posibles cajones donde asignarlos. El resultado sería k^n.

Este caso es equivalente a arreglos con repetición.

5.6. *n* objetos iguales en *k* cajones distinguibles que pueden quedar vacíos

Se agregan $k-1$ objetos D que separan el conjunto de los n objetos en k partes (vacías o no) (e.g. $aaDaaaDDaaDaaaD$). Cada secuencia es equivalente a combinaciones con repetición de n $a$es y k Des. Luego el resultado es:

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

Ejemplo: dividir 40 manzanas entre tres niñas (usar dos peras como divisiones).

Este caso es equivalente a combinaciones con repetición.

5.7. *n* objetos iguales en *k* cajones distinguibles pero no vacíos

Es el mismo caso anterior, pero antes se asigna un objeto a cada cajón, lo cual significa que el problema es equivalente a determinar el número de configuraciones de $n - k$ objetos en cajones distinguibles que pueden quedar vacíos.

$$\binom{n-1}{k-1}$$

5.8. *n* objetos iguales en *k* cajones indistinguibles no vacíos

Estas configuraciones se pueden construir en términos de configuraciones con menos elementos. Existen dos posibilidades para cada configuración:

1. La configuración tiene al menos un cajón con un solo elemento. Estas configuraciones se construyen añadiendo un cajón con un elemento a las configuraciones con $n - 1$ elementos en $k - 1$ cajones.
2. Todos los cajones tienen al menos dos elementos. Estas configuraciones se construyen añadiendo un elemento a cada uno de los cajones de las configuraciones con $n - k$ elementos en k cajones.

Entonces el resultado es

$$\prod_{k}^{n} = \prod_{k-1}^{n-1} + \prod_{k}^{n-k}, \quad n \geq k$$

Nótese que $\prod_1^n = 1$ y $\prod_n^n = 1$.

Ejemplo: Expresar un número natural como la suma de k sumandos diferentes de cero.

5.9. *n* objetos iguales en *k* cajones indistinguibles que pueden quedar vacíos

Se aplica el principio de correspondencia asociando a la distribución de $n + k$ objetos iguales en k cajones indistiguibles no vacíos con n objetos en k cajones indistinguibles que pueden quedar vacíos.

Demostración: Si uno elimina de cada cajón el objeto que es obligatorio que tenga para que sea no vacío tenemos n objetos en k cajones que pueden estar vacíos.

Entonces el resultado es $\prod_{k}^{n+k}$.

Ejemplo: Expresar un número natural como la suma de a lo sumo k sumandos diferentes de cero.

6. Relaciones de recurrencia

Ejemplos:

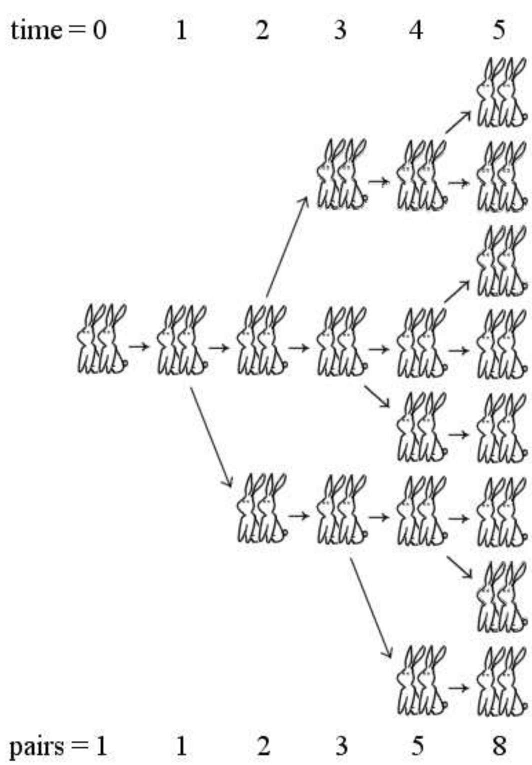
$$F(n) = 3F(n-1) + 5F(n-2) + 4n \;\; F(1) = F(2) = 1$$

$$F(n) = 3F(n-1)F(n-2) \;\; F(1) = F(2) = 1$$

Distinguir entre relaciones lineales y no lineales.

6.1. Relaciones lineales de recurrencia

Fibonacci y el problema de los conejos. Cada pareja sólo se reproduce dos meses luego de nacer.



La relación de recurrencia es:

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2) \;\; F(0) = F(1) = 1$$

Similar relación se establece en el problema: ¿de cuántas formas podemos subir una escalera si sólo podemos dar pasos de 1 o 2 escalones?

Definición

$$x_n = \sum_{i=1}^{k} a_i x_{n-i} + f(n) \tag{1}$$

Si f es nulo la relación se dice homogénea.

Obviamente depende de k condiciones iniciales

$$x_1 = c_1; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_k = c_k$$

Metodología de solución

Si se conocen dos soluciones z_n y y_n de 1, entonces $w_n = y_n - z_n$ es solución de la homogénea $x_n = \sum_{i=1}^{k} a_i x_{n-i}$. Es decir, $y_n = w_n + z_n$ es la suma de una solución arbitraria de la hómogénea y de una solución particular de la no homogénea. En consecuencia, para resolver una ecuación de recurrencia lineal es necesario hallar todas las soluciones de la ecuación homogénea.

Solución de la homogénea

1. Formar el polinomio característico $\sum_{i=0}^{k} a_i y^{k-i} \qquad a_0 = -1$.

   Ejemplo:

   La ecuación $x_n = 4x_{n-1} - 3x_{n-2}$ tiene por polinomio característico $y^2 - 4y + 3$.

2. Hallar las raíces del polinomio característico.

   a) Raíces simples

   Si el polinomio tiene k raíces simples r_j, entonces $x_n = r_j^n$ es una solución de la homogenea para cada j, y toda combinación lineal de éstas es solución también.

Para evitar el trabajo con complejos, recordar que si r es el módulo y θ el argumento del complejo $a + bi$, toda combinación lineal de las raíces complejas es una combinación lineal de $r\cos(\theta)$ y $r\sin(\theta)$.

b) Raíces múltiples

En el caso de que la raiz $r_j$sea de multiplicidad h, entonces la solución asociada a ella es de la forma

$$P_{h-1}(n)r_j^n$$

donde P es un polinomio de grado $h - 1$.

Continuación del ejemplo anterior:

Las raíces de $y^2 - 4y + 3$ son 1 y 3, por lo tanto la solución de la homogénea es $A1^n + B3^n$.

Ejemplo:

Si el polinomio característico fuera $y^2 - 4y + 4$, entonces existe una raíz doble $r = 2$ y la solución de la homogénea es $(An + B)2^n$.

Si el polinomio característico fuera $y^2 - 2y + 2$, las raíces complejas son $1 \pm i$. El módulo del complejo es $\sqrt{2}$ y el ángulo $\theta = \frac{\pi}{4}$. Entonces la solución será $A(\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}))^n + B(\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}))^n$.

Solución de la no homogénea

Ejemplo:

$x_n = 4x_{n-1} - 3x_{n-2} + 2n \qquad x_0 = 0,\ x_1 = 1.$

Se halla una solución particular de la no homogénea proponiendo polinomios de grado creciente.

Si se ensaya con una particular de $x_n = An + B$ la ecuación no homogénea no se satisface.

En cambio, $x_n = An^2 + Bn + C$ conduce a $A = -\frac{1}{2}$ y $B = -2$ y C arbitrario, es decir, la solución particular es $x_n = -\frac{1}{2}n^2 - 2n$.

La solución general es $x_n = -\frac{1}{2}n^2 - 2n + A + B3^n$.

Finalmente, Se determinan A y B para que se satisfagan las condiciones iniciales.

$x_0 = 0 = A + B$

$x_1 = 1 = -\frac{5}{2} + A + 3B$

De donde, $B = \frac{7}{4}$ y $A = -\frac{7}{4}$.

La solución general es entonces $x_n = -\frac{1}{2}n^2 - 2n - \frac{7}{4} + \frac{7}{4}3^n$.

Otro ejemplo: ¿en cuántas regiones divide el plano n rectas que se cortan?

6.2. Curiosidad

Nótese la relación entre el triángulo de Pascal y los números de Fibonacci.